

受検番号		氏名		※	
------	--	----	--	---	--

----- 切り取らないこと -----

令和 9 年度採用 山梨県公立学校教員選考検査

※

高等学校 数学 解答例

1 30 点	(1)	【解答 1】※ド・モアブルの定理を用いる方法 $z=r(\cos \theta +i \sin \theta)$ ($r>0, 0 \leq \theta < 2 \pi$) とおくと、ド・モアブルの定理により、与えられた方程式は $r^6(\cos 6 \theta +i \sin 6 \theta)=\cos 0 +i \sin 0$ 両辺の絶対値と偏角を比較すると $r^6=1 \cdots \textcircled{1}$, $6 \theta =0+2 k \pi$ (k は整数) $\cdots \textcircled{2}$ $r>0$ であるから、$\textcircled{1}$より $r=1$ $\textcircled{2}$より $\theta=\frac{k}{3} \pi$ $0 \leq \theta < 2 \pi$ の範囲で考えると、$k=0, 1, 2, 3, 4, 5$ (ア) $k=0$ のとき $z=\cos 0+i \sin 0=1$ (イ) $k=1$ のとき $z=\cos \frac{\pi}{3}+i \sin \frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} i$ (ウ) $k=2$ のとき $z=\cos \frac{2}{3} \pi+i \sin \frac{2}{3} \pi=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} i$ (エ) $k=3$ のとき $z=\cos \pi+i \sin \pi=-1$ (オ) $k=4$ のとき $z=\cos \frac{4}{3} \pi+i \sin \frac{4}{3} \pi=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} i$ (カ) $k=5$ のとき $z=\cos \frac{5}{3} \pi+i \sin \frac{5}{3} \pi=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} i$ (ア) ～ (カ) より $z=\pm 1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$	【解答 2】※因数分解を用いる方法 方程式を変形すると、$z^6-1=0$ より $(z^3+1)(z^3-1)=0$ つまり $(z+1)(z^2-z+1)(z-1)(z^2+z+1)=0$ よって $z+1=0$ または $z^2-z+1=0$ または $z-1=0$ または $z^2+z+1=0$ ゆえに、$z=\pm 1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$
	(2)	数学のよさの一つは、事象の中にある規則性を見だし、一般的に捉えることができる点である。これにより、個別の問題にとどまらず、より広い場面に適用可能な見方を得ることができる。これを実感させるためには、単に解法を教えるのではなく、複数の具体例から共通点を見いだす活動を取り入れることが有用である。例えば、数列の学習において、いくつかの具体的な規則を比較させることで、一般項の考え方に気付かせることができる。このような活動を通して、生徒は数学のもつ一般化の価値を実感することができる。	

2 20 点	(1)	【正しい解答】 この方程式の実数解を α とおくと、$\alpha^2+2 i \alpha+k=0$ である。 整理して $(\alpha^2+k)+(2 \alpha) i=0$ k, α は実数より、$\alpha^2+k, 2 \alpha$ も実数であるから、$\alpha^2+k=0$ かつ $2 \alpha=0$ したがって、$\alpha=0$ より求める条件は $k=0$ 逆に、$k=0$ のとき、与えられた方程式は確かに実数解 0 をもつ。 よって、求める k の条件は、$k=0$	
	(2)	【誤り】 ・係数に虚数を含む 2 次方程式であるにもかかわらず、判別式を利用して実数解をもつ条件を求めたこと。 ----- 【留意すべきポイント】 ・例えば 2 次方程式 $a x^2+b x+c=0$ は、$\left(x+\frac{b}{2 a}\right)^2=\frac{b^2-4 a c}{4 a^2}$ と変形できるが、係数に虚数が含まれる場合、$\frac{b}{2 a}$ や $\frac{b^2-4 a c}{4 a^2}$ が虚数となる可能性があるため、係数がすべて実数のときとは異なり、$b^2-4 a c$ の値のみで解の種類を判断することはできない。 ・判別式の符号で解の種類（実数・虚数）を完全に判断できるのは、実数係数の場合のみである。例えば、判別式の値が虚数になれば、正・負の概念がない。	

(裏面につづく)

3 14 点	(1)	$a+b+c, d+e+f, g+h+i, a+d+g, b+e+h, c+f+i, a+e+i, c+e+g$ はすべて等しい。この等しい値を S とする。 9 個の数の和 $a+b+c+d+e+f+g+h+i$ は $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ となる。 各行の和 $a+b+c, d+e+f, g+h+i$ はどれも S であるから $S=45 \div 3=15 \cdots \textcircled{1}$ ここで $(b+e+h)+(d+e+f)+(a+e+i)+(c+e+g)=(a+b+c+d+e+f+g+h+i)+3e$ よって、 $4S=45+3e \cdots \textcircled{2}$ ① ②より、 $4 \times 15=45+3e$ したがって、 $e=5$
	(2)	$a+b+c+d, e+f+g+h, i+j+k+l, m+n+o+p, a+e+i+m, b+f+j+n, c+g+k+o, d+h+l+p, a+f+k+p, d+g+j+m$ はすべて等しい。この等しい値を S とする。 16 個の数の和 $a+b+c+d+e+f+g+h+i+j+k+l+m+n+o+p$ は $1+2+3+\cdots+15+16=136$ となる。 各行の和 $a+b+c+d, e+f+g+h, i+j+k+l, m+n+o+p$ はどれも S であるから $S=136 \div 4=34 \cdots \textcircled{1}$ ここで $(a+b+c+d)+(a+f+k+p)+(d+g+j+m)+(a+e+i+m)+(m+n+o+p)+(d+h+l+p)=(a+b+c+\cdots+p)+2X$ よって、 $6S=136+2X \cdots \textcircled{2}$ ① ②より、 $6 \times 34=136+2X$ したがって、 $X=34$

4 16 点	(1)	k を定数として、次の方程式を考える。 $x^2+y^2-50+k(3x+y-20)=0 \cdots \textcircled{1}$ ① が図形を表すとき、その図形は与えられた円と直線の交点を通る。(ただし、 $3x+y=20$ の直線は除く) ① が点 $(10, 0)$ を通るとして、① に $x=10, y=0$ を代入すると、 $50+10k=0$ ゆえに $k=-5$ これを①に代入して整理すると $x^2+y^2-15x-5y+50=0$ つまり、 $\left(x-\frac{15}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{50}{4}$ これは円を表す。 したがって、求める方程式は $x^2+y^2-15x-5y+50=0$ となる。
	(2)	円の方程式を k について整理すると $(x-y+2)k+x^2+y^2-2x-16=0$ 求める 2 点の座標は、この等式を k の値に関係なく成り立たせるはずなので、 k についての恒等式とみて $x-y+2=0 \cdots \textcircled{1}, x^2+y^2-2x-16=0 \cdots \textcircled{2}$ ① から $y=x+2 \cdots \textcircled{3}$ ③を②に代入して整理すると、 $x^2+x-6=0$ ゆえに $x=2, -3$ ③から $x=2$ のとき $y=4, x=-3$ のとき $y=-1$ よって、求める 2 点の座標は $(2, 4), (-3, -1)$ (逆にこの 2 点の座標を①の左辺に代入すると 0 となる。)

5

20 点

(1)

$x > 0$ より $x^2 > 0$, $e^{-x} > 0$ であるから、
 $f(x) > 0$ である。
 $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = -e^{-x}x(x-2)$
 $f'(x) = 0$ とおくと $x = 0, 2$
 よって、 $x > 0$ における
 $f(x)$ の増減表は右の
 表のようになる。

x	0	...	2	...
$f'(x)$	/	+	0	-
$f(x)$	/	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘

(2)

定義域は $x > 0$
 $f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}$ $f'(x) = 0$ とおくと $x = e$
 $f''(x) = \frac{2\log x - 3}{x^3}$ $f''(x) = 0$ とおくと $x = e^{\frac{3}{2}}$
 よって、 $f(x)$ の
 増減表は右の表の
 ようになる。

x	0	...	e	...	$e^{\frac{3}{2}}$	...
$f'(x)$	/	+	0	-	-	-
$f''(x)$	/	-	-	-	0	+
$f(x)$	/	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$	↗

ゆえに、 $x = e$ のとき極大値 $\frac{1}{e}$, 極小値はない。
 変曲点は $\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right)$

したがって、 $f(x)$ は $x = 2$ のとき最大値 $\frac{4}{e^2}$ をとる。
 ゆえに、 $0 < \frac{x^2}{e^x} \leq \frac{4}{e^2}$
 各々の辺を $x (> 0)$ で割ると $0 < \frac{x}{e^x} \leq \frac{4}{e^2} \cdot \frac{1}{x}$
 ここで、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{e^2} \cdot \frac{1}{x} = 0$ であるから、
 はさみうちの原理より $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$

次に、 $t = \log x$ とおくと、
 $x \rightarrow \infty$ のとき $t \rightarrow \infty$ であるから、(1) より
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t} = 0$
 また、 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} \log x = -\infty$ より
 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} \cdot \log x = -\infty$
 よって、漸近線は x 軸、 y 軸である。
 したがって、グラフは下の図のようになる。