高・数学１　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　※ 印のところは記入しない

受検番号		氏名		※	

切り取らないこと

令和６年度採用　山梨県公立学校教員選考検査

※

高等学校　数学　解答例

1（30点）

（１）	①	体系的	②	処理	③	発展的	④	粘り強く	⑤	創造性

		(値)	
（２）	①	2	・y 軸方向に２倍に拡大されていることに着目させる。
	②	3	・周期について考えさせるため，グラフと x 軸の共有点に着目させる。
	③	6	・$y=\mathrm{A}\sin kx$ が原点対称のグラフであることと，グラフの位置に着目させる。

2（15点）

（１）

【誤り部分】$f(x)=0$ が重解をもつ$\Longleftrightarrow x^2-(a+2)x+a^2=0$ が重解をもつ

【正しい解答】

左辺を$f(x)$ とおくと，$f(a)=a^3-2(a+1)a^2+2a^2(a+1)-a^3=0$ より

$f(x)$ は $x-a$ を因数にもつ。よって，　$f(x)=(x-a)\{x^2-(a+2)x+a^2\}$

$f(x)=0$ が重解をもつ $\Longleftrightarrow$（ｉ）「$x^2-(a+2)x+a^2=0$ が重解をもつ」または

（ⅱ）「$x^2-(a+2)x+a^2=0$ が$x=a$ を解にもつ」が成り立つ。

（ｉ）$x^2-(a+2)x+a^2=0$ が重解をもつのは，この方程式の判別式をＤとすると，Ｄ$=0$ であるから

$a=-\dfrac{2}{3}$, 2　したがって，　$a=-\dfrac{2}{3}$ のとき重解 $x=\dfrac{2}{3}$ ，$a=2$ のとき重解 $x=2$

（ⅱ）$x^2-(a+2)x+a^2=0$ が $x=a$ を解にもつ$\Longleftrightarrow$ $a^2-(a-2)a+a^2=0$

すなわち，$a(a-2)=0$ ，$a=0, 2$

$a=0$のとき　重解 $x=0$ ，$a=2$ のとき　重解 $x=2$

（ｉ），（ⅱ）より$a=2$ のとき重解 $x=2$，$a=-\dfrac{2}{3}$ のとき重解 $x=\dfrac{2}{3}$ ，$a=0$のとき重解 $x=0$

（２）

・３次方程式が重解をもつのは，２重解、３重解の両方を考える必要がある。

・２次方程式の解ともう１つの解について，重解になる場合を確認する必要がある。

・得られた解について，逆が成りたつことを確認するとさらによい。

3（15点）

（１）

$$\frac{\mathrm{BP}}{\boxed{\mathrm{PC}}}\cdot\frac{\boxed{\mathrm{CQ}}}{\boxed{\mathrm{QA}}}\cdot\frac{\boxed{\mathrm{AR}}}{\boxed{\mathrm{RB}}}=\boxed{1}$$

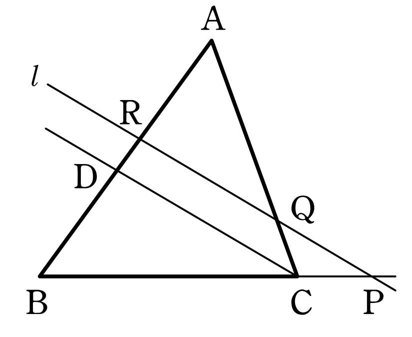
（２）

【証明】Ｃを通り直線 l に平行な直線を引き，直線ABとの交点をＤとすると

BP : PC＝BR : RD ，CQ : QA＝DR :RA

すなわち　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\dfrac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RD}}$ ，$\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\dfrac{\mathrm{DR}}{\mathrm{RA}}$

$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\dfrac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RD}}\cdot\dfrac{\mathrm{DR}}{\mathrm{RA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$



（裏面につづく）

4　20点

（１）

ちょうどｎ段上る方法の総数をa_n とすると　$a_1=1,\ a_2=2$　また，$n\geqq 3$ のとき，ちょうどｎ段上がる方法は最初に１段上るとき，a_{n-1} 通り。最初に２段上るとき，a_{n-2} 通り。よって，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$

ゆえに，数列$\{a_n\}$は $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ ……①を満たす。

①より　$a_3=a_2+a_1=3$，　$a_4=a_3+a_2=5$，　$a_5=a_4+a_3=8$，　$a_6=a_5+a_4=13$，
$a_7=a_6+a_5=21$，　$a_8=a_7+a_6=34$，　$a_9=a_8+a_7=55$，　$a_{10}=a_9+a_8=89$，
$a_{11}=a_{10}+a_9=144$，　$a_{12}=a_{11}+a_{10}=233$，　$a_{13}=a_{12}+a_{11}=377$　　したがって377 通り。

<別解>　１段上るを①，２段上るを②とすると
①が 13 回，①が 11 回で②が 1 回，①が 9 回で②が 2 回，・・・，①が 1 回で②が 6 回の
7 パターンあり，${}_{13}\mathrm{C}_0+{}_{12}\mathrm{C}_1+{}_{11}\mathrm{C}_2+{}_{10}\mathrm{C}_3+{}_{9}\mathrm{C}_4+{}_{8}\mathrm{C}_5+{}_{7}\mathrm{C}_6=377$　したがって377 通り。

（２）

（１）より，数列$\{a_n\}$　$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ ……①　の一般項を求めればよい。

$x^2-x-1=0$ の解 を $x=\alpha,\beta$，　$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$　とすると

①は $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$，$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$ と変形できる。

数列$\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$は初項$a_2-\alpha a_1=2-\alpha$ 公比 β の等比数列で，　$a_{n+1}-\alpha a_n=(2-\alpha)\cdot\beta^{n-1}$ ……②

数列$\{a_{n+1}-\beta a_n\}$は初項$a_2-\beta a_1=2-\beta$ 公比 α の等比数列で，　$a_{n+1}-\beta a_n=(2-\beta)\cdot\alpha^{n-1}$ ……③

②－③より　$-(\alpha-\beta)a_n=(2-\alpha)\cdot\beta^{n-1}-(2-\beta)\cdot\alpha^{n-1}$　　$2-\alpha=\beta^2,\ 2-\beta=\alpha^2,\ \alpha-\beta=\sqrt{5}$

$-\sqrt{5}a_n=\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}$　　$\sqrt{5}a_n=\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}$　　ゆえに　$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}$

したがって，ちょうどｎ段上るのぼり方は　$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}$ 通り。

5　20点

（１）

楕円の式の両辺を x で微分すると，　$\dfrac{x}{2}+2yy'=0$，$y'=-\dfrac{x}{4y}$　接点を点 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$ とすると，

傾きは $-\dfrac{x_1}{4y_1}$ である。接線　$y-y_1=-\dfrac{x_1}{4y_1}(x-x_1)$ は$(4,0)$を通るので，代入すると，$4{y_1}^2=4x_1-{x_1}^2$ …①

接点は楕円上にあるから$\dfrac{{x_1}^2}{4}+{y_1}^2=1$ …②，①②を連立し，傾きが負の接線は　$y=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(x-4)$　となる。

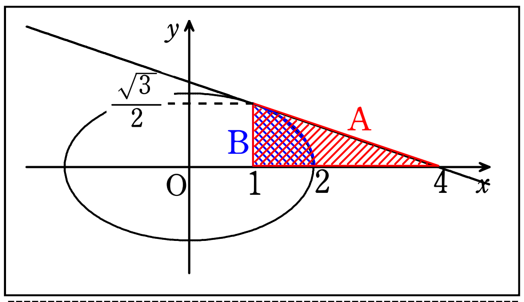
<別解>　楕円$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$ における 接線 $\dfrac{x_1x}{4}+y_1y=1$ は点$(4,0)$を通るので，代入すると

$x_1=1,\ y_1=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ が得られる。接線の傾きが負であることより，$y_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって求める接線は，$\dfrac{x}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y=1$ すなわち，$x+2\sqrt{3}y=4$　　$\left(y=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(x-4)\right)$

（２）

右図のように面積を三角形Ａと楕円の一部Ｂに分ける。



$x=2\sin\theta$ とおく　$\dfrac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$

x	$1\ \to\ 2$
θ	$\frac{\pi}{6}\ \to\ \frac{\pi}{2}$

Ａ－Ｂ　が求める面積である。

Ａ：（１）より　$x=1$ のときの y 座標は$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ なので，

面積は　$3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

Ｂ：面積は　$\displaystyle\int_1^2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2\theta\,d\theta$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\theta)\,d\theta$$

$$=\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}-\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)=\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$　　したがって，求める面積は $\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$