高・数学１　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　※ 印のところは記入しない

受検番号		氏名		※	

切り取らないこと

令和５年度採用　山梨県公立学校教員選考検査

※

高等学校　数学　解答例

1（30点）	（１）	①	技能	②	実数	③	命題	④	二次
		⑤	表現力	⑥	多面的	⑦	社会	⑧	数学的

1　（２）

【証明過程】

$a,b,c,d\ \in \mathrm{Q}$ とし，$\alpha=a+b\sqrt{2}$,$\beta=c+d\sqrt{2}$ とおくと α，$\beta\in\mathrm{Q}(\sqrt{2})$ である。ただし，　$c\neq0$ または $d\neq0$ とする。

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(ac-2bd)+(bc-ad)\sqrt{2}}{c^2-2d^2}=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}$$

ここで，有理数は四則演算に関して閉じているので $\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}$ ，$\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\in\mathrm{Q}$　　$\therefore\ \frac{\alpha}{\beta}\in\mathrm{Q}(\sqrt{2})$

【注意すべきポイント】

商 $\frac{\alpha}{\beta}$ を実際計算し，その式が $p_1+q_1\sqrt{2}$ の形になることを確かめさせる。

商 $\frac{\alpha}{\beta}$ を実際計算して得られる式 $p_1+q_1\sqrt{2}$ において，有理数は四則演算において閉じていることから，

p_1，$q_1\in$ Q となることを確認し，　$p_1+q_1\sqrt{2}\ \in\mathrm{Q}(\sqrt{2})$ となることを説明する。　　　等

2（20点）

【例１】方程式 $\sqrt{x+2}=x$ と方程式 $x+2=x^2$ のそれぞれの解を「解の集合」と捉え，解の集合の包含関係を用いて２つの方程式の解の同値性（必要性や十分性の確認）を考察し，説明する場合。

命題 P1 : $\sqrt{x+2}=x\ \Rightarrow\ x+2=x^2$ は解の集合を用いて $\{\ 2\ \}\Rightarrow\{-1\ ,2\ \}$ と表すことができ，真の命題である。これより方程式 $x+2=x^2$ の解 $x=2$ ，-1 は必要条件であり，方程式 $\sqrt{x+2}=x$ の解 $x=2$ は十分条件となっていることを説明する。

命題 P2 : $x+2=x^2\ \Rightarrow\ \sqrt{x+2}=x$ は偽の命題となり，反例は $x=-1$ となる。

以上より，方程式 $\sqrt{x+2}=x$ の解の集合と方程式 $x+2=x^2$ の解の集合は同値ではないことを理解させる。

$x=-1$ は命題 P1 の必要条件であり十分条件ではないことを説明する。

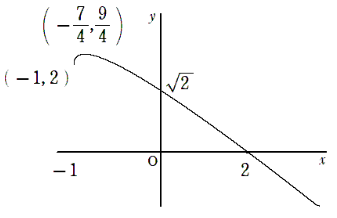
補足　方程式 $\sqrt{x+2}=x$ の両辺を２乗することで，解の集合の範囲が拡大したものと捉えられる。$x=-1$ を無縁根という。

【例２】　$x=-1$ の図形的意味を，グラフと x 軸との共有点の考察をとおして説明する場合。

方程式 $\sqrt{x+2}=x$ 及び方程式 $x+2=x^2$ の実数解はそれぞれ，関数 $f(x)=\sqrt{x+2}-x$ 及び関数 $g(x)=x^2-x-2$のグラフの x 軸との共有点として同一視できる。このことを利用して $x=-1$ について説明する。 $x=-1$ は関数 $g(x)=x^2-x-2$ の x 軸との２つの共有点のうちの１つであることを説明する。なお，グラフの考察においては，増減，極値，凹凸について確認することが必要である。

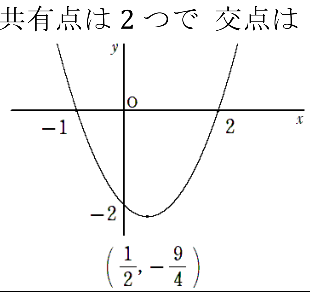
○関数 $f(x)=\sqrt{x+2}-x$ のグラフ

x軸との共有点は１つで 交点は $x=2$ である



○関数 $g(x)=x^2-x-2$ のグラフ

x軸との共有点は２つで 交点は $x=2$ と $x=-1$ である。



（裏面に続く）

3

20 点

（１）

$x>1$ かつ $y>1$ のとき，$\log_x y>0$ … ① である。

①より不等式 $\log_x y<2+3\log_y x$ は底の変換公式を用いて，

次のように変形される。

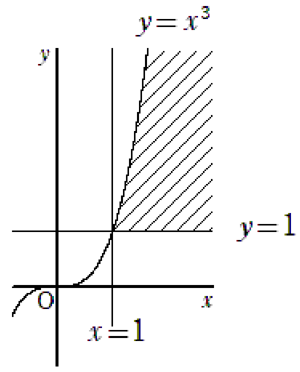
$(\log_x y-3)(\log_x y+1)<0$.…②

①かつ②から $0<\log_x y<3$ よって $\log_x 1<\log_x y<\log_x x^3$

$x>1$ より，$1<y<x^3$

$x>1$ かつ $y>1$ とあわせて，点 (x, y) の存在範囲は

右図の斜線の範囲となる。ただし境界線は含まない。



（２）

$\log_x y<0$ …③ であるので不等式 $\log_x y<2+3\log_y x$ は次のように変形される。

$(\log_x y-3)(\log_x y+1)>0$ … ④

③かつ④から $\log_x y<-1$ となる。

ここで底 x の範囲で場合分けを行う。

ｉ) $x>1$ のとき

③より $y<1$，また，$\log_x y<\log_x x^{-1}$ から $y<\frac{1}{x}$

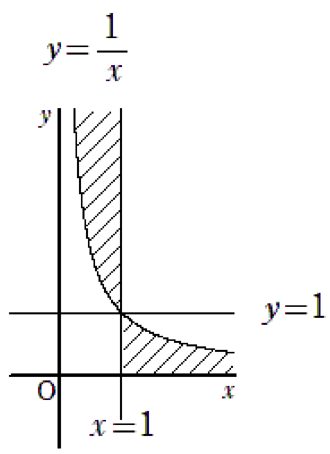
よって，点 (x, y) は $x>1$, $y<1$，$y<\frac{1}{x}$ を満たす。

ⅱ) $0<x<1$ のとき

③ より $y>1$，また，$\log_x y<\log_x x^{-1}$ から $y>\frac{1}{x}$

よって，点 (x, y) は $0<x<1$, $y>1$，$y>\frac{1}{x}$ を満たす。

ｉ)，ⅱ) より，点 (x, y)の存在範囲は右図の斜線の範囲となる。ただし境界線は含まない。



4

20 点

（１）

$V=\int_0^h \pi x^2\, dy=\pi\int_0^h y\, dy=\pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h=\frac{\pi}{2}h^2$

（２）

$V=\frac{\pi}{2}h^2$ の両辺を t で微分すると，$\frac{dV}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{2}h^2\right)=\frac{d}{dh}\left(\frac{\pi}{2}h^2\right)\cdot\frac{dh}{dt}==\pi h\frac{dh}{dt}$

与えられた条件 $\frac{dV}{dt}=-\sqrt{h}$ を用いて，$\frac{dh}{dt}=-\frac{1}{\pi\sqrt{h}}$ を得る。

（３）

$\frac{dh}{dt}=-\frac{1}{\pi\sqrt{h}}$ より 両辺を t で積分すると，$\frac{2\pi}{3}h^{\frac{3}{2}}=-t+c$ … (※) （ただし c は積分定数 ）

(※) において，$t=0$ のとき，$h=4$ であるから，$c=\frac{16\pi}{3}$ となる。

よって，容器内の水を完全に排水するのに要する時間 T は $h=0$ のときであるから

(※) より，$T=\frac{16\pi}{3}$ となる。

5

10 点

二項係数 ${}_pC_k$は，${}_pC_k=\frac{p(p-1)(p-2)\cdots\cdots(p-k+1)}{k!}$ $(k=1,2,\cdots,p-1)$ とかける。

二項係数 ${}_pC_k$ は異なる p 個のものから k 個選ぶ選び方の総数であるから整数値となる。

分子の p は素数であり，$p>k$ であるから，p と $k!$ は互いに素である。∵ $k!$ を構成する素因数に pを割るものはない。

よって二項係数 ${}_pC_k$ は，${}_pC_k=p\times(\text{整数})$ となる。∴ ${}_pC_k$ $(k=1,2,\cdots,p-1)$ は p の倍数である。